Лекция 5 Полные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения второго порядка. Теорема Коши.

Цель лекции:

Сформировать у студентов понимание критериев точности (полноты) дифференциальных уравнений первого порядка, методов их решения; изучить основные типы дифференциальных уравнений второго порядка, а также разобрать формулировку и содержание теоремы Коши о существовании и единственности решения.

Основные вопросы:

1. **Полные (точные) дифференциальные уравнения: определение и критерий точности.**
2. **Метод решения полных дифференциальных уравнений.**
3. **Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные виды.**
4. **Приведение уравнения второго порядка к системе первого порядка.**
5. **Теорема Коши о существовании и единственности решения.**

Уравнение

$$P(x; y)\, dx + Q(x; y)\, dy = O \ (48.17) \qquad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x; y)$, т. е.

$$P(x; y)\, dx + Q(x; y)\, dy = du(x; y).$$

В этом случае ДУ (1) можно записать в виде $du(x;y) = 0$, а его общий интеграл будет:

$$u(x; y) = c. \qquad (2)$$

Приведем условие, по которому можно судить, что выражение

$$\Delta = P(x;y)\, dx + Q(x;y)\, dy$$

есть полный дифференциал.

Теорема . Для того чтобы выражение $\Delta = P(x; y)\, dx+Q(x; y)\, dy$, где функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (3)$$

Таким образом, при решении ДУ вида (1) сначала проверяем выполнение условия (3). Затем, используя равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, находим функцию $u(x;y)$. Решение записываем в виде (2).

Дифференциальные уравнения второго порядка.

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ДУ высших порядков. ДУ второго порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x;y;y';y'')=0 \qquad (4)$$

или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно старшей производной:

$$y''=f(x;y;y'). \qquad (5)$$

Решением ДУ называется всякая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ (5) называется функция $y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2)$, где c1 и c2 - не зависящие от x произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x,\ C_1,\ C_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения c1 и C2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$y(x_0)=y_0\ ,\ \ y'(x_0)=y_0' \qquad (6)$$

существуют единственные значения постоянных $C_1=C_1^0$, $C_2=C_2^0$ такие, что функция

$y=\varphi(x,\ C_1^0,\ C_2^0)$ является решением уравнения (5) и удовлетворяет начальным условиям (6).

График всякого решения ДУ второго порядка называется интегральной кривой. Общее решение ДУ (5) представляет собой множество интегральных кривых; частное решение - одна интегральная

кривая этого множества, проходящая через точку (xo; y0) и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0)=y_0'$.

Задача Коши.
Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (5), удовлетворяющего заданным начальным условиям (6), называется задачей Коши.
Теорема. (существования и единственности задачи Коши). Если в уравнении (5) функция f(x;y;y') и ее частные производные f_y' $f_{y'}''$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных, то для всякой точки (x0 ; y0 ; y $'$) є D существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям (6)

Аналогичные понятия и определения имеют место для ДУ n-го порядка, которое в общем виде записывается как

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$$

или

$$y^{(n)}=f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \qquad (7)$$

если его можно разрешить относительно старшей производной.

Начальные условия для ДУ (7) имеют вид

$$y(x_0)=y_0\ ,\ \ y'(x_0)=y_0'\ ,\ \ y''(x_0)=y_0''\ \ , \dots ,\ \ ,\ \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0'^{(n-1)} \qquad (8)$$

Общее решение ДУ n-го порядка является функцией вида

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2, \dots, C_n\ ) \qquad (9)$$

содержащей n произвольных, не зависящих от x постоянных.

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим три типа уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x, y) \qquad (10)$$

Порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования уравнения.

2. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x, y') \qquad \mathbf{(11)}$$

не содержащее явно искомой функции у.

Порядок можно понизить, введя новую переменную $y' = z(x)$.

3. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(y, y') \qquad \mathbf{(11)}$$

Порядок можно понизить, введя новую переменную $y' = z(y)$

Пример Решить уравнение $y'' = sin2x$

Решение. Последовательно интегрируя два раза данное уравнение, получим

$$y'' = (y')' = \frac{d(y')}{dx} = sin2x \quad => \quad d(y') = sin2x\, dx \quad => \quad y' = \int sin2x\, dx = -\frac{1}{2}cos2x + C_1$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad => \quad dy = \left(-\frac{1}{2}cos2x + C_1\right)dx \quad =>$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{2}cos2x + C_1\right)dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$$ - общее решение уравнения

Пример. Решить уравнение $x(y'' + 1) + y' = 0$

Решение. Примем $y' = z(x)$ => $y'' = z'$ подставляя в ДУ поучим: $x(z' + 1) + z = 0$ =>

$$z' + \frac{1}{x}z = -1$$ это линейное ДУ , здесь $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = -1$

Используя формулу (4) педыдущей лекции, получим

$$z = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int(-1)e^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{-\ln x}\left[C - \int e^{\ln x}dx\right] = x^{-1}\left[C - \int x dx\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[C - \frac{x^2}{2}\right] = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$$

Т.о. решение линейного ДУ $z = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$

Возвращаясь к исходной переменной, получим $y' = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$ $\quad dy = \left(\frac{C}{x} - \frac{x}{2}\right)dx$

$$\int dy = \int\left(\frac{C}{x} - \frac{x}{2}\right)dx \quad => \quad y = C \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C_1$$ - общее решение уравнения

Пример. Решить уравнение $2yy'' = (y')^2 + 1$

Решение. $y' = z(y)$ => $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$ подставляя в уравнение =>

$2yzz' = z^2 + 1$ уравнение с разделяющимися переменными =>

$$\frac{2zdz}{z^2 + 1} = \frac{dy}{y} \quad => \quad \ln(z^2 + 1) = \ln y + \ln C_1, \quad z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx \quad => \quad \pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2) \quad => \quad y = \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2 + \frac{1}{C_1}$$

Контрольные вопросы:

1. условие, при котором ДУ называется уравнением в полных дифференциалах?

2. общий вид ДУ второго порядка.

3. общее решение ДУ второго порядка.

4. методы решения ДУ второго порядка.

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.

7. Шипачев В.С. Высшая математика

8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.

9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.